Analytické a koanalytické třídy Banachových prostorů

Ondřej Kurka

5. dubna 2012

Věta (P. Holický, M. Laczkovich)

Pokud f je spojitá funkce na reflexivním reálném Banachově prostoru, pak její množina fréchetovské subdiferencovatelnosti $S(f)$ je borelovské třídy $F_{\sigma\delta\sigma}$.

Věta (P. Holický, M. Laczkovich)

Pokud f je spojitá funkce na reflexivním reálném Banachově prostoru, pak její množina fréchetovské subdiferencovatelnosti $S(f)$ je borelovské třídy $F_{\sigma\delta\sigma}$.

Věta 1

Na každém nereflexivním reálném Banachově prostoru X existuje lipschitzovská funkce f taková, že $S(f)$ není borelovská.

Věta (P. Holický, M. Laczkovich)

Pokud f je spojitá funkce na reflexivním reálném Banachově prostoru, pak její množina fréchetovské subdiferencovatelnosti $S(f)$ je borelovské třídy $F_{\sigma\delta\sigma}$.

Věta 1

Na každém nereflexivním reálném Banachově prostoru X existuje lipschitzovská funkce f taková, že $S(f)$ není borelovská.

Poznámka

Existuje spojitá funkce f na $\mathbb{R}^3$ taková, že $S(f)$ není $G_{\delta\sigma\delta}$.
Problém složitosti množiny $S(f)$ zůstává otevřený v $\mathbb{R}^2$.

Nadále v této prezentaci,

$$\textit{Banachův prostor} \quad = \quad \textit{reálný separabilní Banachův prostor.}$$

Věta (J. Bourgain, 1980)

Pokud Banachův prostor X obsahuje izomorfní kopii každého reflexivního Banachova prostoru, pak X obsahuje izomorfní kopii každého Banachova prostoru.

Věta (J. Bourgain, 1980)

Pokud Banachův prostor X obsahuje izomorfní kopii každého reflexivního Banachova prostoru, pak X obsahuje izomorfní kopii každého Banachova prostoru.

Věta 2

Nechť X je Banachův prostor. Pokud je splněna jedna z podmínek

- *X obsahuje izometrickou kopii každého reflexivního fréchetovsky hladkého Banachova prostoru,*

Věta (J. Bourgain, 1980)

Pokud Banachův prostor X obsahuje izomorfní kopii každého reflexivního Banachova prostoru, pak X obsahuje izomorfní kopii každého Banachova prostoru.

Věta 2

Nechť X je Banachův prostor. Pokud je splněna jedna z podmínek

- *X obsahuje izometrickou kopii každého reflexivního fréchetovsky hladkého Banachova prostoru,*
- *X obsahuje izometrickou kopii každého reflexivního Banachova prostoru s fréchetovsky hladkým duálem,*

Věta (J. Bourgain, 1980)

Pokud Banachův prostor X obsahuje izomorfní kopii každého reflexivního Banachova prostoru, pak X obsahuje izomorfní kopii každého Banachova prostoru.

Věta 2

Nechť X je Banachův prostor. Pokud je splněna jedna z podmínek

- *X obsahuje izometrickou kopii každého reflexivního fréchetovsky hladkého Banachova prostoru,*
- *X obsahuje izometrickou kopii každého reflexivního Banachova prostoru s fréchetovsky hladkým duálem,*

pak X obsahuje izometrickou kopii každého Banachova prostoru.

Definice

Standardní borelovský prostor separabilních Banachových prostorů je definován jako

$$\mathrm{SB} = \left\{F \subset C([0,1]) : F \text{ je uzavřený a lineární}\right\}$$

opatřený σ-algebrou generovanou množinami

$$\{F \in \mathrm{SB} : F \cap U \neq \emptyset\}$$

přes všechny otevřené podmnožiny U prostoru $C([0,1])$.

Definice

Standardní borelovský prostor separabilních Banachových prostorů je definován jako

$$\mathrm{SB} = \left\{ F \subset C([0,1]) : F \text{ je uzavřený a lineární} \right\}$$

opatřený σ-algebrou generovanou množinami

$$\{F \in \mathrm{SB} : F \cap U \neq \emptyset\}$$

přes všechny otevřené podmnožiny U prostoru $C([0,1])$.

Analytickou podmnožinou SB rozumíme buď prázdnou množinu, anebo $\varphi(\mathbb{R})$ pro nějaké borelovské zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{SB}$.

Definice

Standardní borelovský prostor separabilních Banachových prostorů je definován jako

$$\mathrm{SB} = \big\{F \subset C([0,1]) : F \text{ je uzavřený a lineární}\big\}$$

opatřený σ-algebrou generovanou množinami

$$\{F \in \mathrm{SB} : F \cap U \neq \emptyset\}$$

přes všechny otevřené podmnožiny U prostoru $C([0,1])$.

Analytickou podmnožinou SB rozumíme buď prázdnou množinu, anebo $\varphi(\mathbb{R})$ pro nějaké borelovské zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{SB}$.

Koanalytickou podmnožinou SB rozumíme doplněk analytické podmnožiny SB.

Fakt

Podmnožina SB *je borelovská právě tehdy, když je analytická i koanalytická zároveň.*

Fakt

Podmnožina $\mathcal{SB}$ *je borelovská právě tehdy, když je analytická i koanalytická zároveň.*

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou koanalytické, ale nejsou analytické:

- reflexivní prostory,

Fakt

Podmnožina $\mathcal{SB}$ *je borelovská právě tehdy, když je analytická i koanalytická zároveň.*

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou koanalytické, ale nejsou analytické:

- reflexivní prostory,
- prostory se separabilním duálem,

Fakt

Podmnožina $\mathcal{SB}$ *je borelovská právě tehdy, když je analytická i koanalytická zároveň.*

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou koanalytické, ale nejsou analytické:

- reflexivní prostory,
- prostory se separabilním duálem,
- prostory s Radon-Nikodýmovou vlastností,

Fakt

Podmnožina SB *je borelovská právě tehdy, když je analytická i koanalytická zároveň.*

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou koanalytické, ale nejsou analytické:

- reflexivní prostory,
- prostory se separabilním duálem,
- prostory s Radon-Nikodýmovou vlastností,
- striktně konvexní prostory,

Fakt

Podmnožina SB *je borelovská právě tehdy, když je analytická i koanalytická zároveň.*

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou koanalytické, ale nejsou analytické:

- reflexivní prostory,
- prostory se separabilním duálem,
- prostory s Radon-Nikodýmovou vlastností,
- striktně konvexní prostory,
- fréchetovsky/gâteauxovsky hladké prostory,

Fakt

Podmnožina $\mathcal{SB}$ *je borelovská právě tehdy, když je analytická i koanalytická zároveň.*

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou koanalytické, ale nejsou analytické:

- reflexivní prostory,
- prostory se separabilním duálem,
- prostory s Radon-Nikodýmovou vlastností,
- striktně konvexní prostory,
- fréchetovsky/gâteauxovsky hladké prostory,
- prostory s fréchetovsky/gâteauxovsky hladkým duálem.

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou analytické, ale nejsou koanalytické:

- izomorfně univerzální prostory,

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou analytické, ale nejsou koanalytické:

- izomorfně univerzální prostory,
- izometricky univerzální prostory,

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou analytické, ale nejsou koanalytické:

- izomorfně univerzální prostory,
- izometricky univerzální prostory,
- prostory, které obsahují izomorfní kopii nekonečně-dimenzionálního prostoru Z,

Poznámka

Následující třídy Banachových prostorů jsou analytické, ale nejsou koanalytické:

- izomorfně univerzální prostory,
- izometricky univerzální prostory,
- prostory, které obsahují izomorfní kopii nekonečně-dimenzionálního prostoru Z,
- prostory, které obsahují izometrickou kopii prostoru Z, pokud jeho dimenze je alespoň 2.

Třída reflexivních prostorů není analytická. Dokonce lze říci, že analytické množiny reflexivních prostorů jsou “malé”:

Třída reflexivních prostorů není analytická. Dokonce lze říci, že analytické množiny reflexivních prostorů jsou "malé":

Věta (P. Dodos, V. Ferenczi, 2007)

Pokud $\mathcal{A} \subset \mathrm{SB}$ je analytická množina sestávající z reflexivních prostorů, pak existuje reflexivní prostor Z, který obsahuje izomorfní kopii každého $X \in \mathcal{A}$.

Platí i analogický výsledek pro neuniverzální prostory.

Věta (P. Dodos, 2009)

Pro třídu $\mathcal{C}$ Banachových prostorů je ekvivalentní:

Platí i analogický výsledek pro neuniverzální prostory.

Věta (P. Dodos, 2009)

Pro třídu $\mathcal{C}$ Banachových prostorů je ekvivalentní:

(1) Banachův prostor, který je izomorfně univerzální pro $\mathcal{C}$, je také izomorfně univerzální pro všechny Banachovy prostory.

Platí i analogický výsledek pro neuniverzální prostory.

Věta (P. Dodos, 2009)

Pro třídu $\mathcal{C}$ Banachových prostorů je ekvivalentní:

(1) Banachův prostor, který je izomorfně univerzální pro $\mathcal{C}$, je také izomorfně univerzální pro všechny Banachovy prostory.

(2) Každá analytická množina $\mathcal{A} \subset \mathrm{SB}$, která obsahuje až na izomorfismus každý prvek $\mathcal{C}$, obsahuje také prvek, který je izomorfně univerzální pro všechny Banachovy prostory.

Platí i analogický výsledek pro neuniverzální prostory.

Věta (P. Dodos, 2009)

Pro třídu $\mathcal{C}$ Banachových prostorů je ekvivalentní:

(1) Banachův prostor, který je izomorfně univerzální pro $\mathcal{C}$, je také izomorfně univerzální pro všechny Banachovy prostory.

(2) Každá analytická množina $\mathcal{A} \subset \mathrm{SB}$, která obsahuje až na izomorfismus každý prvek $\mathcal{C}$, obsahuje také prvek, který je izomorfně univerzální pro všechny Banachovy prostory.

Problém

Platí izometrická verze tohoto výsledku?

Definice

Bod p je *bodem hustoty* měřitelné množiny $S \subset \mathbb{R}$, pokud

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\lambda(S \cap (p - \varepsilon, p + \varepsilon))}{2\varepsilon} = 1.$$

Definice

Bod p je *bodem hustoty* měřitelné množiny $S \subset \mathbb{R}$, pokud

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\lambda(S \cap (p-\varepsilon, p+\varepsilon))}{2\varepsilon} = 1.$$

Věta (důsledek Lebesgueovy věty o hustotě)

Je-li $S \subset \mathbb{R}$ měřitelná, pak je skoro každý bod $p \in \mathbb{R}$ bodem hustoty S nebo $\mathbb{R} \setminus S$.

Definice

Bod p je *bodem hustoty* měřitelné množiny $S \subset \mathbb{R}$, pokud

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\lambda(S \cap (p-\varepsilon, p+\varepsilon))}{2\varepsilon} = 1.$$

Věta (důsledek Lebesgueovy věty o hustotě)

Je-li $S \subset \mathbb{R}$ měřitelná, pak je skoro každý bod $p \in \mathbb{R}$ bodem hustoty S nebo $\mathbb{R} \setminus S$.

V netriviálním případě však vždy existují “výjimečné body”, tj. body, které nejsou bodem hustoty ani jedné z množin S a $\mathbb{R} \setminus S$. Naším cílem je získat co možná nejlepší kvantitativní verzi tohoto výroku.

Definice

Dolní hustotou množiny S v bodě p rozumíme

$$\underline{d}_S(p) = \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\lambda(S \cap (p-\varepsilon, p+\varepsilon))}{2\varepsilon}.$$

Definice

Dolní hustotou množiny S v bodě p rozumíme

$$\underline{d}_S(p) = \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\lambda(S \cap (p-\varepsilon, p+\varepsilon))}{2\varepsilon}.$$

Věta (V. Kolyada, 1983)

Pokud S a $\mathbb{R} \setminus S$ mají kladnou míru, pak existuje bod, ve kterém jsou obě dolní hustoty množin S a $\mathbb{R} \setminus S$ alespoň $1/4$.

Problém

Najděte hodnotu $\delta_{\mathcal{H}}$, definovanou jako supremum čísel δ, pro která je splněno

$$\mathcal{H}(\delta) : \begin{cases} \text{Pokud } S \text{ a } \mathbb{R} \setminus S \text{ mají kladnou míru, pak existuje bod, ve kterém jsou obě dolní hustoty množin } S \text{ a } \mathbb{R} \setminus S \text{ alespoň } \delta. \end{cases}$$

V. Kolyada, 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2807...$

V. Kolyada, 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2807...$

A. Szenes, 1984 (preprint 2007): $0,2629... \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2718...$

V. Kolyada, 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2807...$

A. Szenes, 1984 (preprint 2007): $0,2629... \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2718...$

M. Csörnyei, J. Grahl and T. C. O'Neil, 2007: $\delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2710...$

V. Kolyada, 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2807...$

A. Szenes, 1984 (preprint 2007): $0,2629... \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2718...$

M. Csörnyei, J. Grahl and T. C. O'Neil, 2007: $\delta_{\mathcal{H}} \leq 0,2710...$

Věta 3

$\delta_{\mathcal{H}}$ je jediný reálný kořen polynomu $8x^3 + 8x^2 + x - 1$. Tedy,

$$\delta_{\mathcal{H}} = 0,268486... \,.$$

Problém

Jak je to v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$?

Problém

Jak je to v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$?

Tvrzení

Existuje $\delta = \delta(n) > 0$ takové, že:
Pokud S a $\mathbb{R}^n \setminus S$ mají kladnou míru, pak existuje bod, ve kterém jsou obě dolní hustoty množin S a $\mathbb{R}^n \setminus S$ alespoň δ.